TD 3 : Résolution de systèmes linéaires : comment résoudre de grands systèmes linéaires ?

EXERCICE 1 - Mise en forme matricielle du Pivot de Gauss

Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ à résoudre, avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nous avons vu que la méthode du Pivot de Gauss consiste à appliquer à la matrice $\mathbf{A}$ (et au vecteur $\mathbf{b}$) une suite de transformations pour aboutir à une matrice triangulaire supérieure $\mathbf{U}$. Nous allons montrer que cette transformation peut s'écrire comme le produit matriciel :

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}.\mathbf{A}$$

où $\mathbf{G}$ est le produit de matrices élémentaires, traduisant les opérations successives effectuées lors de l'application de la méthode du Pivot de Gauss.

1. Vérifiez que l'échange de deux lignes d'une matrice $\mathbf{A}$ peut s'écrire sous forme matricielle comme le produit $\mathbf{P}.\mathbf{A}$ où $\mathbf{P}$ est une matrice de permutation. Par exemple, si on veut échanger les lignes $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ de la matrice $\mathbf{A}$, il suffit de la multiplier à gauche par la matrice de permutation $\mathbf{P}$ donnée par :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Vérifier que si l'on veut remplacer la ligne $\mathcal{L}_2$ de la matrice $\mathbf{A}$ par la ligne $\mathcal{L}_2 - 2\mathcal{L}_1$, il suffit de la multiplier à gauche par la matrice $\mathbf{E}$ donnée par :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. En déduire la forme de la matrice $\mathbf{E1}$ tel que le produit $\mathbf{E1}.\mathbf{A}$ donne une matrice ne contenant que des 0 sous le chiffre 2 de la première colonne.
4. Déterminez les opérations suivantes permettant d'aboutir à une matrice triangulaire supérieure.
5. En déduire l'expression finale de la matrice $\mathbf{G}$.
6. Résoudre le système.

EXERCICE 2 - Décomposition LU

1. Réaliser la décomposition LU de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Utiliser cette décomposition pour résoudre le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 2.7 \end{pmatrix}$$

3. De même, utiliser cette décomposition pour calculer le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$.
4. La décomposition de Cholesky est-elle applicable à la matrice $\mathbf{A}$? Justifier.
5. Déduire l'écriture générale des $U_{i,j}$ et des $L_{i,j}$ pour une matrice de taille $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 3 - Algorithme de Cholesky

Soit la matrice $\mathbf{A}$ (vue en cours) :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Justifier qu'on peut appliquer à la matrice $\mathbf{A}$ une décomposition de Cholesky.
2. Réaliser la décomposition de Cholesky.
3. En déduire l'écriture générale des $L_{i,j}$ pour une matrice de taille $n \in \mathbb{N}$.