# TD 3 : Orthogonalité, projection et série de Fourier

ESIR 3 option Ingénierie Biomédicale
M2 EEA parcours SISEA option Signal/Image

Université de Rennes1

## Exercice 1 : Base orthogonale

Soit F une famille orthogonale de $(V, <, >)$, $F = \{v_1, \cdots, v_n\}$ avec $v_i \neq 0, \forall i$,
1. Montrer que F est libre.

2. Montrer que :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{< u, v_i >}{||v_i||^2} v_i$$

## Exercice 2

Nous considérons l'espace vectoriel $\mathbb{C}_3$ avec produit scalaire Euclidien complexe et les trois vecteurs :

$$u = (0, i, 2i)$$
$$v = (2i, 0, -i)$$
$$w = (0, i, \tfrac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2} i})$$

1) Déterminer les relations d'orthogonalité entre les vecteurs u, v et w.
2) Calculer la norme de u, v et w et les distances Euclidiennes entre eux.
3) Vérifier que $(u, v, w)$ est une base (non orthogonale) de $\mathbb{C}_3$.
4) Soit S le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_3$ engendré par u et w. Calculer $P_S v$, la projection orthogonale de v sur S. Calculer $d(v, P_S v)$, i.e. la distance Euclidienne entre v et sa projection sur S, et vérifier qu'elle minimise la distance entre v et les vecteurs de S (suggestion : considérer la distance au carrée).
5) En utilisant ce que nous avons obtenu dans les points précédents, déterminer une base orthogonale et une base orthonormale de $\mathbb{C}_3$ sans passer par la procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (suggestion : se rappeler de la relation géométrique du vecteur résidu r par rapport au sous-espace S).
6) Etant donné le vecteur $a = (2i, -1, 0)$, écrire la décomposition de $a$ et l'identité de Plancherel par rapport à la base orthonormale déterminée dans le point 5). En déduire le vecteur de la base orthonormale qui a le poids le plus importante dans la décomposition de a (et qui donne la meilleure reconstruction grossière de a).

Exercice 3 : Base de Fourier

L'espace vectoriel complexe dans lequel on va travailler est l'ensemble de toutes les suites sur $\mathbb{Z}_N$ á valeurs complexes, noté $l^2(\mathbb{Z}_N) = \{z : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}\}$. Sachant que $\forall m, n = 0, \cdots, N-1, \epsilon_m(n) = e^{2i\pi \frac{mn}{N}}$, montrer $\epsilon = (\epsilon_0, \cdots, \epsilon_{N-1})$ est une base orthogonale de $l^2(\mathbb{Z}_N)$.
Rappel : On peut aussi introduire un produit scalaire dans $l^2(\mathbb{Z}_N)$ avec :

$$< x, y >= \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\overline{y(k)}$$

donc $x, y \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ sont orthogonales si et seulement si $< x, y >= 0$.

Exercice 4

Etant donné $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ quelconque, on appelle les valeurs complexes $< z, \epsilon_m >$, $m \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$, les coefficients de Fourier de z, qu'on écrit $\widehat{z}(m)$.
Explicitement :

$$\widehat{z}(m) = \sum_{k=0}^{N-1} z(n)e^{-2i\pi \frac{mn}{N}}$$

On définit la transformée de Fourier discréte inverse tel que

$$\check{z}(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{z}(n)e^{2i\pi \frac{mn}{N}}$$

Montrer que la la transformée de Fourier discréte inverse (IDFT) est l'opérateur linéaire inverse de la transformée de Fourier discréte (DFT).

Exercice 5 : DFT

Calculer la DFT du signal suivant : $x[n] = \{1, 2, 1, 0\}$.