TP 1 : Transformée de Fourier des signaux discrets

Julie Coloigner, IRISA, julie.coloigner@irisa.fr
ESIR 2/3 option Ingénierie Biomédicale

Université de Rennes1

1 Transformée de Fourier

L'échantillonnage consiste à représenter un signal à temps continu $x(t)$ par ses valeurs $x(nT_e)$ à des instants multiples de T_e.

Théorèreme de Shannon : Lorsqu'un signal $x(t)$ a un spectre à supporrt borné (c.a.d. $X(f) = 0$ pour $|f| > f_{max}$), il est possible d'échantillonner ce signal sans perdre d'information. Pour cela, il suffit de choisir une fréquence d'échantillonnage $F_e = 1/T_e$ est au moins 2 fois supérieure à la plus grande fréquence intervenant dans le spectre. On pourra alors reconstruire $x(t)$ parfaitement á partir de $x(nT_e)$. Si cette condition n'est pas respectée, on observe un "repliement de spectre".

On échantillonne un signal $x(t)$ en le mulitpliant par un ensemble d'impulsions de Dirac d'amplitude unité et de période T_e. On note le signal échantillonné x_e :

$$x_e(t) = x(t)p(t) = x(t)\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT_e)$$

avec $p(t)$ peigne de Dirac.

1. Calculer la transformée de Fourier de $x_e(t)$, noté $X_e(f)$.
2. Représenter $X_e(f)$ et suivant si la condition de Shannon est respectée ou non.

Soit un signal x sinusoïdal de fréquence w echantilloné sur une suite d'instants $t = [0s, 1s]$ avec un pas d'échantillonage de $T_e = 0.01s$. Notons n le nombre d'échantillons. On souhaite estimer le spectre $X(f)$ de $x(t)$ en fonction de w.

La fonction Matlab pour calculer la transformée de Fourier est fft. Cette algorithme appliqué au $x(t)$ propose directement un échantillonnage du spectre $X(f)$ au pas de fréquence $F_e/n = 1/T_en$.

Cette estimation de puissance spectrale par fft est calculée par périodisation du signal $x(t)$. Le spectre estimé est alors periodique (de periode F_e). Cela signifie que les puissances spectrales estimées entre $F_e/2$ et F_e sont équivalentes aux fréquences négative entre $F_e/2$ et 0 Hz du signal $x(t)$.

La représentation du spectre $X(f)$ sur échantillonage de fréquences $f = [0, F_e]$ est parfaitement correcte. Seulement, la lecture du spectre $X(f)$ sur un graphe est difficilement lisible avec un tel échantillonage de de fréquences. La fonction fftshift réorganise le résultat de fft pour afficher la fréquence nulle au centre (voir doc fftshift).

Calculez et affichez le module de la transformée de Fourier d'une fonction sinusoïdale pour différentes fréquences :

```
Te = 0.01;
t = 0:Te:(1-Te);
freq_max = floor(numel(t)/2);
for w=0:freq_max
   x = sin(t*2*pi*w);
   X = fft(x);
   subplot(2,1,1)
   plot(t,x);
   subplot(2,1,2)
   plot(-freq_max:freq_max-1,abs(fftshift(X)), '*');
   axis([-freq_max (freq_max-1) 0 70]);
   pause(0.1)
end
```

Que se passe-t-il pour `w=freq_max` ? Que se passe-t-il si `w>freq_max` ?
On se place dans le cas où $f_{max} = 1$ et $F_e = 2.234$: peut-on reconstruire le signal à partir de sa transformée de Fourier ?
Testez également sur une somme de sinusoïdes de rang 1, 3 et 5.

Si le nombre d'échantillons du signal n'est pas une puissance de deux, on a intérêt à compléter le signal par des échantillons de valeur nulle afin de pouvoir utiliser l'algorithme de la FFT. Cette technique porte le nom de technique de remplissage par des zéros (zero padding en anglais). Le remplissage d'une séquence numérique par des zéros fournit une meilleure représentation de x, sans pour autant augmenter la précision du résultat. La commande $fft(x, Ntfd)$ calcule la transformée de Fourier discrète sur $Ntfd$ points du vecteur x complèté avec des zéros si x à moins de $Ntfd$ points et tronqué si x a plus de $Ntfd$ points. La FFT calculée est de taille identique que celle du signal traité. Pour le vérifier on utilise la commande whos.

2 Filtrage passe-bas

La transformée de Fourier est une opération linéaire sur le vecteur/signal x de la forme :

$$\text{TF}(x) = \begin{bmatrix} e^{-2i\pi 0\frac{0}{m}} & e^{-2i\pi 0\frac{1}{m}} & \dots & e^{-2i\pi 0\frac{m-1}{m}} \\ e^{-2i\pi 1\frac{0}{m}} & e^{-2i\pi 1\frac{1}{m}} & \dots & e^{-2i\pi 1\frac{m-1}{m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-2i\pi (m-1)\frac{0}{m}} & e^{-2i\pi (m-1)\frac{1}{m}} & \dots & e^{-2i\pi (m-1)\frac{m-1}{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$$

La transformée de Fourier discrète inverse est obtenue en prenant l'inverse de la matrice de transformée de Fourier. Cette matrice étant orthogonale, il suffit de prendre la transposée puis la conjuguée. On peut travailler dans l'espace des fréquences $[-F_e/2, F_e/2-1]$ pour définir un filtre $H(f)$. Quelque soit la représentation en fréquentielle, on peut appliquer le filtrage passe-bas pour couper les fréquences hautes.

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

avec les composantes du spectre H nuls à partir de d'une fréquence donée.
On considère un signal etant une combinaison lineaire de 1 sinusoide de fréquence $40Hz$:

$$x(t) = 0.6 \times sin(2\pi \times 44)$$

On échantillone ce signal à la cadence $F_e = 10kHz$ ce qui donne un signal à temps discret.

Ajoutez deux secondes raies à une fréquence de $46Hz$ et $250kHz$. Vous devez retrouver des pics aux frèquences 44 Hz, 46 Hz et 250 Hz. Sont-ils positionnés précisément ?
Que se passe-t-il si on change F_e en $F_e = 6kHz$, en $F_e = 4kHz$, en $F_e = 0,5kHz$? Commentez.
On veut réaliser maintenant une opération de filtrage passe-pas du signal, pour éliminer la composante à 250Hz et ne conserver que les composantes à 44 Hz et 46 Hz. On éliminera pour cela les fréquences au delà de 2 kHz. Réalisez très simplement cette opération dans le domaine de Fourier : vous avez ainsi réalisé un filtrage passe-bas idéal.