

MATH-S4 TP2 - Comment approcher des intégrales par des formules de quadrature ?

Il est recommandé de tout lire avant de commencer. Les informations sur le travail à rendre se trouvent à la fin du sujet.

1 Objectifs

L'objectif de ce TP est d'approcher numériquement l'intégrale suivante :

$$I = \int_a^b f(x)dx, \text{ avec } f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, a = 0 \text{ et } b = 1 \quad (1)$$

Vous implémenterez trois méthodes de quadrature (rectangles à gauche, points milieux, et trapèzes) et vous évalueriez leur convergence et leur performance.

2 Méthodes de quadrature

1. Créez la fonction `intRectG(f, a, b, n)` qui calcule une approximation numérique Q_n de $I = \int_a^b f(x)dx$, en utilisant la méthode des rectangles à gauche pour n sous-intervalles de longueur h entre a et b .
2. Créez la fonction `intPointsM(f, a, b, n)` qui calcule une approximation numérique Q_n de $I = \int_a^b f(x)dx$, en utilisant la méthode des points milieux pour n sous-intervalles de longueur h entre a et b .
3. Créez la fonction `intTrap(f, a, b, n)` qui calcule une approximation numérique Q_n de $I = \int_a^b f(x)dx$, en utilisant la méthode des trapèzes pour n sous-intervalles de longueur h entre a et b .

3 Étude de convergence

Créez un script `test1.m` qui aura pour but d'étudier la convergence des cinq méthodes de quadrature considérées.

1. Calculez analytiquement l'expression de $I = \int_a^b f(x)dx$.
2. Représentez dans une figure le logarithme de l'erreur de la quadrature $\log_{10} |I - Q_n|$ pour les cinq méthodes en fonction du logarithme de $h = \frac{b-a}{n}$. Vous pouvez considérer les valeurs de n suivantes

$$n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16392, 32784.$$

Quelles sont les pentes des courbes obtenues ? Commentez les résultats.

4 Étude de performance

Créez un script `test2.m` qui aura pour but d'étudier la performance des cinq méthodes de quadrature considérées.

1. Représentez dans une figure le nombre d'évaluations de $f(x)$ réalisées en fonction de n pour les cinq méthodes. Vous pouvez considérer les mêmes valeurs de n que pour l'étude de convergence.
2. Représentez dans une autre figure le temps de calcul en fonction de n pour les cinq méthodes. Vous pouvez considérer les mêmes valeurs de n que pour l'étude de convergence. Pour mesurer les temps de calcul, vous pouvez utiliser les commandes Matlab `tic` et `toc`.

5 Conclusion

1. En tenant compte des résultats des deux études, quelle est, d'après vous, la méthode de quadrature la plus appropriée pour la fonction $f(x)$?
2. Identifiez deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ pour lesquelles les méthodes de quadrature optimales respectives, en termes de convergence et de performance, soient différentes de celle trouvée pour la fonction $f(x)$.

6 Compte rendu

Vous rédigerez un rapport synthétisant de manière logique vos diverses observations et réponses aux questions. Vous déposerez sur moodle votre rapport, en format **pdf**, ainsi qu'un dossier compressé contenant les différents fonctions et scripts que vous aurez créés.

7 Références

- [1] Matworks. *Chapitre 6 - Quadrature*. n.d. Retrieved from <https://www.mathworks.com/content/dam/mathworks/mathworks-dot-com/moler/quad.pdf>