TP 2 : Décomposition en série de Fourier

ESIR 3 option Ingénierie Biomédicale

Université de Rennes1

1 Décomposition en série de Fourier

Une fonction périodique $f(t)$ de période T peut, sous certaines conditions mathématiques, se décomposer en une somme de fonctions sinusoidales de la forme : (décomposition en séries de Fourier)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n cos(n\omega_0 t) + b_n sin(n\omega_0 t))$$

avec

$$a_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) cos(n\omega_0 t) dt$$

et

$$b_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) sin(n\omega_0 t) dt$$

On va maintenant définir un signal en créneau x comme décrit sur la figure suivante :

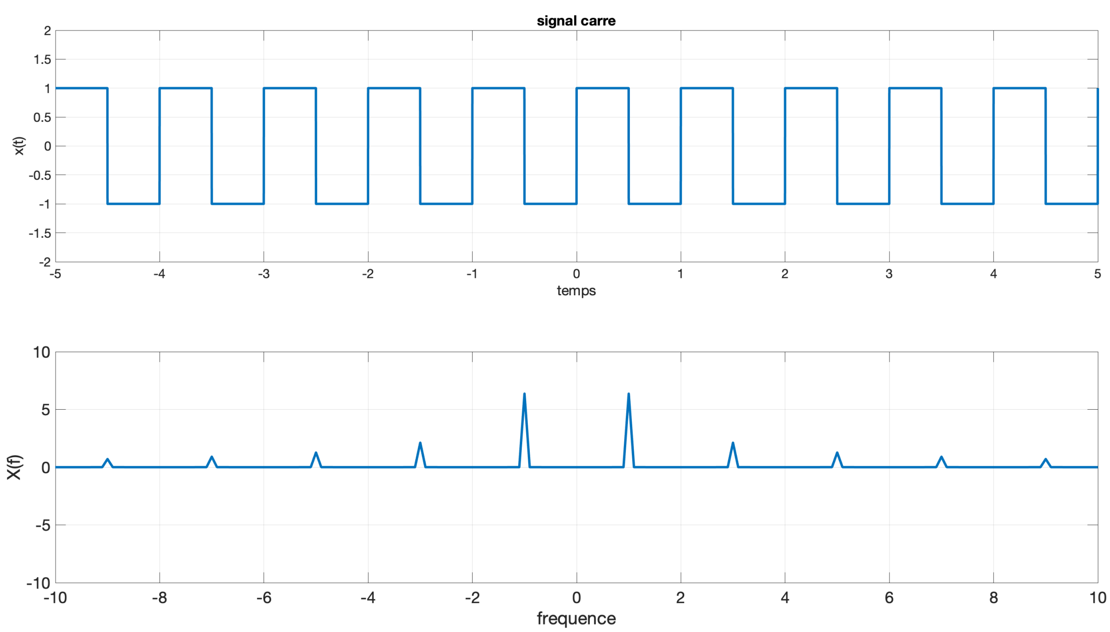

Figure La fonction créneau et sa transformée de Fourier

Voici le code Matlab pour générer la fonction céneau :

```
fe=1000;
te=1/fe;
subplot(2,1,1);
t=[-5:0.001:5];
x=square(2*pi*t);
plot(t,x);
axis([-5,5,-2,2]);
xlabel('temps');
ylabel('x(t)');
title('signal carre');
```

- Calculer son développement en série de Fourier X_n.
- A partir des coefficient de Fourier, reconstruiser la fonction $x(t)$ pour $n = 5, 10, 15, 20$.
- Estimer à partir de quelle valeur de n on reconstruit de maniére précise le signal.

2 Analyse spectrale : la Transformée de Fourier à court terme

L'analyse temps-fréquence s'appuie sur une idée très naturelle et très simple. Puisque la TF n'est pas localisée en temps du fait de l'intégration sur $\mathbb{R}$, il suffit d'y introduire une fonction bien localisée en temps, une fenêtre d'analyse. Pour une fenêtre notée $w(t)$ ci-dessous, on définit la transformée de Fourier à court terme, dite aussi transformée de Fourier fenêtrée par :

$$S_w[x](s, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)w(t-s)exp^{-2\pi i\nu t}\, dt \tag{1}$$

Cette fenêtre d'analyse étant centrée sur l'instant s, l'intégrande prend des valeurs significatives essentiellement dans l'intervalle $[s-\Delta t/2, s+\Delta t/2]$ seulement ; le résultat est une fonction qui dépend de la fréquence ν mais aussi conjointement de l'instant s considéré. Parmi les fenêtres $w(t)$ habituelles, on trouve la fenêtre rectangulaire (indicatrice d'un intervalle de durée finie), les fenêtres de Hamming, Hann, Blackman...
Toutes ces fonctions sont unimodales et rapidement décroissantes vers $\pm\infty$, par exemple une arche de fonction sinusoidale, une gaussienne... En pratique, les fenêtres à support compact en temps sont privilégiées. Le choix de la forme de la fenêtre dâanalyse $w(t)$ est surtout guidé par ses propriètè de localisation fréquentielle.

2.1 Etude des fenêtres temporelles

Etudiez les réponses temporelles et fréquentielles des fenêtres Rectangulaire, Bartlett, Hamming, Hanning et Blackman.

Retrouvez les caractéristiques des fenêtres (largeur du lobe principal, atténuation du lobe secondaire) et étudiez l'influence du nombre de points N de la fenêtre.

2.2 Analyse spectrale d'un signal sinusoidal

Tracez la caractéristique idéale du spectre d'une fonction sinus échantillonnée. On prendra les valeurs suivantes : fréquence d'échantillonnage : $F_e = 20kHz$; fréquence de la sinusoide $F_0 = 1000Hz$.
Les échantillons $x(kT_e)$ sont tronqués successivement par les échantillons $y(kTe)$ des fenêtres rectangulaire et de Hanning de 1024 points.
Quelle est la fenêtres la mieux adapté entre Hanning et Hamming pour faire apparaˆitre les deux fréquences F_1 et F_1 du signal échantillonné $x(kT_e)$ suivant :

$$x(kT_e) = A_1 sin(2\pi F_1 kT_e) + A_2 sin(2\pi F_2 kT_e)$$

avec : $F_e = 20kHz$, $F_1 = 1025Hz$, $F_2 = 1250Hz$, $A_1/A_2 = 10 - 3$, Nbre de points de calcul de la FFT : $N = 1024$.